

ASTRONOMY
SOCIETY
VEGA



МАТЕМАТИКА И ШАХ

М³ МАЈ
МЕСЕЦ
МАТЕМАТИКЕ

Саша Вукашиновић
професор математике

СУБОТА
17. мај 2014. године

17.00 h

Атријум Основне школе
«Вук Караџић» у Сурдулици

Математика и шах

Саша В. Вукашиновић
Сурдулица
sasamikevukasinovic@gmail.com

Овај текст је настао инспирисан предавањем које је аутор одржао у склопу обележавања маја, месеца математике, 17. маја 2014. године у Сурдулици, а у организацији аматерског астрономског друштва "ВЕГА" из тог града.

1. Увод

Каква веза постоји између математике и шаха? Важи ли уопште уврежено мишљење међу обичним светом па и међу шахистима и математичарима, да математичари добро играју шах и да шахисти могу владати математиком? Ово су питања којима ћемо се бавити у овом тексту. Аутор сматра да му четрдесетогодишње искуство бављења овим два великим мисаоним областима људског живота даје за право да мало унесе и лични суд о томе.

2. Историјат настанка шаховске игре и легенде о шаху

Тачно време настанка шаховске или сличне игре се не зна. Највероватније је слична игра настала у Индији пре више од четири хиљаде година на шта указују неки описи који датирају много касније. Оно што се дефинитивно зна то је да први писани документ који садржи опис "чатарунге", игре која је претеча данашњег шаха, потиче из 570. године и пронађен је у Индији. Касније, негде у седмом веку, Персијанци, походећи Индију, откривају ову игру, мењају јој име у "шатранц" и мало мењају правила игре у делу који се односи на кретање фигура. Тако је ова игра, продором Арапа, дошла до Европе. Све до периода ренесансе, играна је на дворовима као племићка и краљевска игра, у доста ограниченом кругу људи. Са појавом три значајна човека за развој и популаризацију шаховске игре: **Rodrigo (Ruy) López de Segura** (с. 1530 – с. 1580), који је био свештеник, касније бискуп, написао и објавио прву књигу о савременом шаху 1561. **Libro de la invención liberal y arte del juego del Axedrez**; **Luis Ramírez de Lucena** (с. 1465 – с. 1530) који је објавио најстарију књигу о шаху **Repetición de Amores y Arte de Ajedrez con 101 Juegos de Partido** ("Repetition of Love and the Art of Playing Chess"), објављену у Саламанци 1497. и **François-André Danican Philidor** (September 7, 1726 – August 31, 1795), француски композитор и шахиста, аутор чувене књиге о шаху **Analyse du jeu des Échecs** који је у



шаховском свету најпознатији по реченици "Пешаци су душа шаха", шах добија своје данашње контуре и постаје водећа мисаона игра широког слоја људи. У ренесансном периоду игра, по називу персијских владара добија име "шах", мења се сама суштина (циљ је заробити и задати завршни ударац противничком краљу а

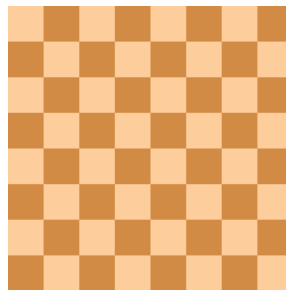


Леонард Ди Кутри побеђује Руја Лопеза

не уништити све противничке фигуре што је био случај са чатарунгом) и постаје све популарнија међу обичним светом.

Са популарношћу настале су и разне легенде о шаху. Једна говори да је шах измислио римски бог рата Марс да би задивио богињу Каису. Због ове легенде Каиса је постала богиња шаха и дан данас се сматра шаховском богињом. Постоји и легенда да је шах измислио Паламед испред зидина Троје како би забавио грчке војнике који су је опседали. Можда је најлепша легенда о премудрој краљици из епа "Шахнаме" или "Књиге краљева" која каже да је шах измислила краљица, мајка два сина која су се отимала о престо, понудивши им рат за таблом уместо проливања крви. За нашу причу је свакако најбоља легенда о великом везиру **Сеси Ибн Дахиру**. Она каже да је велики везир измислио ову игру и показао је индијском краљу. Он је толико био одушевљен да је понудио везиру све што пожели: благо, тканину, драго камење, земљу било шта. Везир је био скроман. Рекао је: "Краљу, ставите ви мени на ово прво поље табле једно зрно пшенице, на друго два, на треће четири, на четврто осам и тако све до последњег поља". Краљ се насмејао и послао по врећу пшенице. Није дошао ни до десетог поља. Онда је позвао све саветнике да израчунају колико му зрна треба. После дужег времена су му саопштили да толико неће моћи да сакупе ни за хиљаду година па макар сваку стопу земље засејали пшеницом. Овде би могла да почне прича о вези математике и шаха.

Ова легенда је добро позната међу шахистима и симболизује практичну неисцрпност шаховске игре. Размотримо је детаљно.



Ово је шаховска табла. Квадратног је облика и подељена је редовима и колонама на $8 \times 8 = 64$ поља, наизменично тамним и светлим. Ако пратимо легенду ево шта се дешава

1. поље: 1
2. поље: $2 \times 1 = 2$
3. поље: $2 \times 2 = 4$
4. поље: $2 \times 4 = 8$
- ⋮
- ⋮
- ⋮
64. поље: $2 \times 4611686018427387904 = 9223372036854775808$

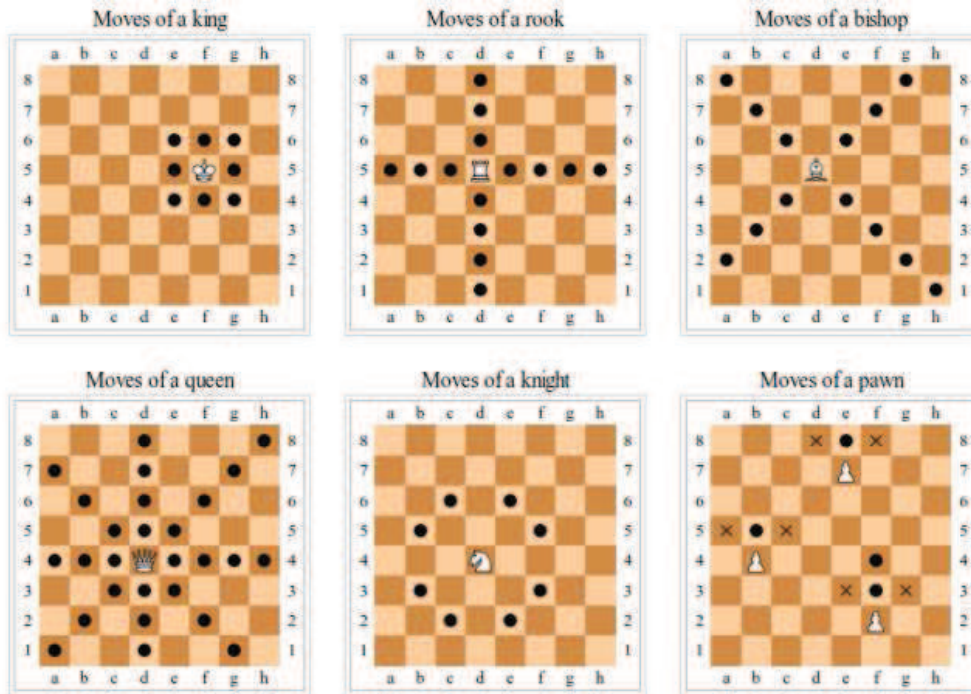
Дакле, ово представља коначан геометријски ред чији је збир

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1-2^{64}}{1-2}$$

а то је број =18 446 744 073 709 551 615.

Ако овај број поделимо са 1000 онда бисмо добили приближно 18 446 744 073 709 552 зрна жита годишње. Ако сада овај број поделимо са укупном површином копна на Земљи, која апроксимативно износи 148 940 000 000 000 m², добићемо тачно 124 зрна по квадратном метру, па испада да саветници из легенде нису много погрешили.

3. Кретање фигура и њихова вредност

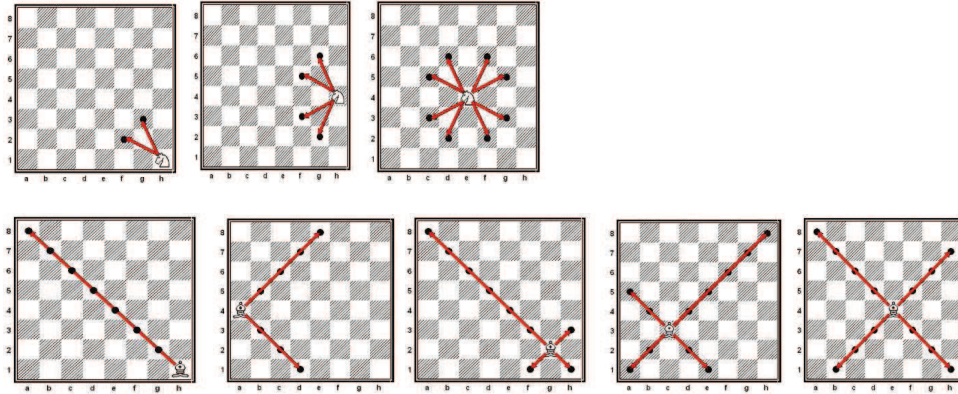


На овим сликама је приказано кретање фигура у шаху редом: краљ, топ, ловац, дама, скакач и пешак. Постоје још нека некарактеристична кретања краља и пешака, али она нису битна за ову тему.

Као што можемо приметити, највећи број поља може да покрије дама, затим топ, ловац, скакач и на крају краљ и пешак. Можемо да размишљамо овако: краљ је фигура чија се вредност не може упоређивати са ниједном другом фигуром. Како бисмо остале фигуре вредновали? Један од начина вредновања је управо по броју "тучених" поља, али шта се дешава у практичној партији када треба размењивати фигуре? На основу вишевековног искуства уведена је **релативна вредност** фигура:

Пешак	–	1
Скакач	–	3
Ловац	–	3
Топ	–	5
Дама	–	9

а ево и зашто релативна

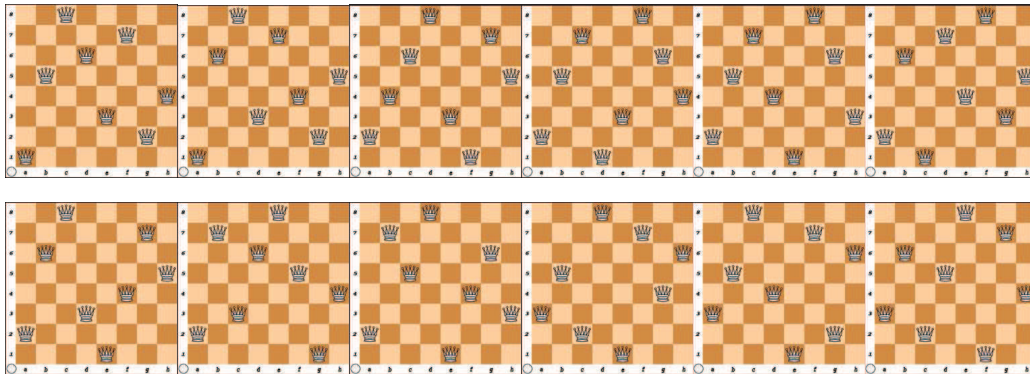


Број поља која може да туче нека од фигура зависи од њеног положаја на табли. Још једна, врло интересантна чињеница, говори о **релативности** оваквог вредновања фигура. Ако посматрамо која је најмања могућа вредност фигура, без пешака, која је потребна да би се добила партија, односно матирао краљ, то би био топ чија је вредност 5, али два скакача дају вредност 6 а нису довољна за победу. Баш код таквог случаја се јавља једна другачија противуречност: у неким ситуацијама када слабија страна има на табли пешака победа са два скакача је могућа, а то нам даје разлику вредности фигура тачно 5. С друге стране већа укупна вредност фигура ограничава краља слабије стране тако да су патне позиције, ако слабија страна нема других фигура на табли, веома честе у практичним партијама. Све ово нам говори да овако уведена вредност фигура не даје баш реалну слику о стварном стању на табли. Овај проблем би можда могао да се реши увођењем нечега што се зове **потенција фигуре**. Ако таблу поделимо на четири мања квадрата и обележимо их на следећи начин: горњи леви са **S (скакач)**, горњи десни са **L (ловац)**, доњи леви са **T (топ)** и доњи десни са **D (дама)** а затим свако поље у одређеном квадрату попунимо бројем тучених поља дате фигуре са тог места, као на слици

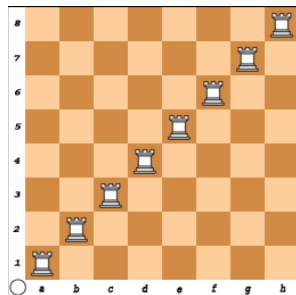
	2	3	4	3	7	7	7	7	
S	3	4	5	6	9	9	9	7	L
	4	6	8	8	11	11	9	7	
	4	6	8	8	13	11	9	7	
	14	14	14	14	27	25	23	21	
T	14	14	14	14	25	25	23	21	D
	14	14	14	14	23	23	23	21	
	14	14	14	14	21	21	21	21	

Ако сада придружимо свакој ознаци збир свих бројева у квадрату који представља добићемо овакве вредности $S = 84, L = 140, T = 224, D = 364$. Ови бројеви представљају потенцију или моћ фигуре. Шта овде можемо да приметимо? $D = L + T$ што и није неочекивано због начина кретања даме, али важи и $T = S + L$ што је прилично изненађујуће. Са математичке стране можемо још нешто да приметимо $D : T = 1,625; T : L = 1,6$ и $L : S \approx 1,67$ а овај однос се до прве децимале

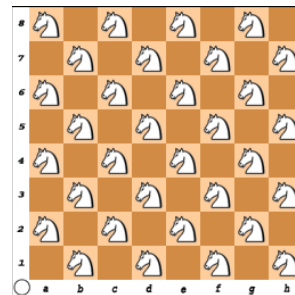
поклапа са **златним пресеком**. Дакле, лепота шаховске игре, можда лежи баш у том природном складу фигура и њиховог кретања по табли. Са шаховске стране потенција фигура нам тачно одређује минималну моћ која је потребна за матирање а то је 224. Многи проблеми у вези са распоредом и кретањем фигура на шаховској табли били су тема размишљања и математичара и шахиста кроз историју. Ево неких: различити проблеми распореда. Уопштено они се могу формулисати овако: распоредити по шаховској табли одређени број истих фигура тако да се међусобно не нападају.



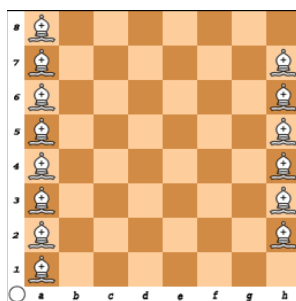
Основни распореди проблема осам дама (има их укупно 92, 12 основних, остали се добијају ротацијом и симетријом)



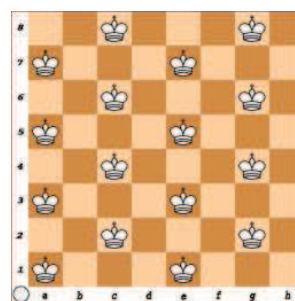
Проблем осам топова



Проблем 32 скакача



Проблем 14 ловаца



Проблем 16 краљева

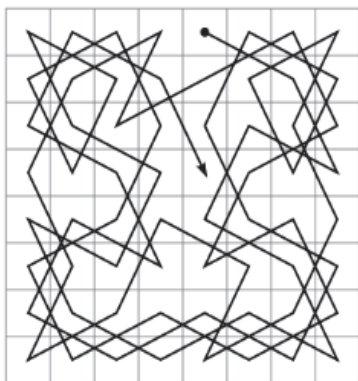
На основу оваквих, релативно једноставних, проблема могу се смишљати разне игре инспирисане шахом. Примери таквих игара су *топов поход* и *дамин поход*. Топов поход је игра која се одвија на шаховској плочи, при чему се топ налази на пољу a1 и креће се за једно поље навише или удесно. Играју два играча

наизменично као у шаху. Губи онај који мора да својим потезом постави топа на поље h8. Дамин поход је скоро иста игра само са дамом на почетном пољу и она може да се креће још и дијагонално десно-горе за једно поље. У првој игри други играч побеђује а у другој први и то врло једноставном стратегијом. Кључно поље је f6. Код топовог похода је стратегија проста. Треба само избегавати поља на дијагонали a1-f6, а код даминог похода супротно - треба постављати даму баш на поља те дијагонале.

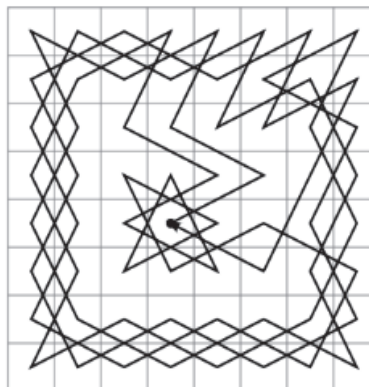
Ово су једноставни примери **стратегијских игара** које се играју уз поштовање строгих правила а заједничка су следећа: играју два играча наизменично, не постоји фактор среће (бацање новчића, бацање коцке за игру или слично). Шах је управо једна од таквих игара, вероватно најсложенија од свих досад постојећих и он је послужио као основа за стварање једне посебне математичке дисциплине **теорије игара** која се развила из *теорије стратегије игара*. Творац ове теорије **Ернст Зермело** је још 1913. године доказао једну врло интересантну теорему везану за шах. Она тврди да је могуће "решити шах", тј. могуће је одредити како ће се завршити "перфектно" одиграна партија шаха. Практично је немогуће, с обзиром на број могућих позиција, одредити ко ће победити у једној таквој партији, али ова теорема тврди да је могуће одредити. Овде се поставља и питање "перфектности" што додатно компликује целокупно размишљање. Ако једна просечна шаховска партија траје између 30 и 40 потеза онда би могућих легалних позиција било између 10^{43} и 10^{47} . Са тренутном технологијом није могуће проверити сваку позицију. Пети првак света, др Макс Еве, је шездесетих година прошлог века утврдио док је радио у ИВМ-у, да до десетог потеза има укупно 16551882910054400000000000 различитих позиција па је и та чињеница довољна за тврдњу да ће се шах играти још дуго.

4. Човек или машина

Сасвим друга врста проблема је кретање скакача по шаховској табли. Проблем се може дефинисати овако: Треба обићи свако поље на шаховској табли скакачем тачно једном и из задатог почетног поља стићи у задато завршно поље. Овиме су се бавили и шахисти и математичари још од деветог века. Неки велики математичари, попут Леонарда Ојлера, су проучавали овој проблем и извели неке занимљиве закључке. Најпре, можемо разврстати проблем **скакачевог обиласка** на две врсте: отворени и затворени. Ако је завршно поље различито од полазног ради се о *отвореном скакачевом обиласку*, а ако је завршно поље исто као и полазно ради се о *затвореном скакачевом обиласку*.

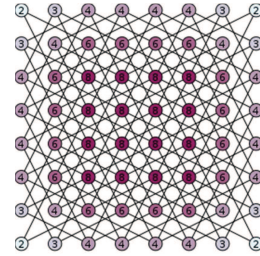


пример отвореног скакачевог обиласка



пример затвореног скакачевог обиласка

Ови проблеми спадају у примере тражења Хамилтоновог пута или Хамилтоновог круга из теорије графова и врло су темељито проучени. Оно што је занимљиво је да је још Ојлер одредио колико Хамилтонових кругова постоји за овај проблем. Дошао је до броја 26534728821064. Када би покушали да изведемо ово практично за таблом, ако у просеку потез траје једну секунду, требало би нам 50 милиона година отприлике. Наравно, данас постоје моћни



комјутери који нам у овоме могу помоћи. Ипак, ми им морамо, још увек, задати начин како да то ураде. Најједноставније је да се провере све могуће варијанте, али то није практично. Размотримо један овакав *алгоритам* за тражење скакачевог обиласка. Нека се скакач налази на одређеном пољу. Од свих поља на која може да скочи у следећем потезу бирамо оно са кога скакач има најмањи могућ број поља на које може да скочи у наредном покушају. Ако пронађемо пут завршили смо, а ако нисмо вратимо се на почетно поље. Ово је познати Варнздорфов алгоритам за овај проблем и пример је хеуристичког приступа у изради алгоритама. Суштина је да се избегну непотребне провере и тако скрати потребно време. Овим примером бисмо могли да отворимо још једну тему а то је употреба рачунских машина за играње шаха. Идеја да се конструише машина која би играла шах потиче још из 18. века. 1769. године конструисана је машина под називом "The Turk", која је постала позната, чак су помоћу ње нађена нека решења скакачевог обиласка. Онда се испоставило да је конструкција пуна грешака, чак врло наивних, али је то био почетак размишљања у том правцу. Од тада, многи шахисти, математичари и компјутерски стручњаци покушавају да направе такву машину која би бар приближно могла да се супротстави човеку. Педесетих година прошлога века, са појавом електронских рачунских машина, решење овог проблема постаје све реалније. Прекретница у развоју машина за играње шаха је била 1997. година и пораз тадашњег светског првака у шаху Гарија Каспарова од "Deep Blue" рачунара компаније ИВМ. Данас су развијени веома моћни шаховски софтвери чак и за персоналне рачунаре и може се рећи да су на нивоу идеалних експертских система. Развој веома софистицираних алгоритама и уз коришћење многих знања из разних области математике и вештачке интелигенције, допринео је да се многи запитају да ли ће нас машине коначно надвладати. Аутор је склон да више верује човеку. Сетимо се проблема скакачевог обиласка и оног хеуристичког алгоритма. Суштина је била у одбацивању непотребних провера. Машини то мора да се саопшти путем компјутерског програма а он је предвидив. Сваки шахиста има већ "уграђен" такав систем у глави и што је најважније свако има свој посебан систем па је врло тешко унапред предвидети како ће противников мозак функционисати. У сваком случају развој шаховских програма и апликација иде у три смера:

- Играње шаха
- Учење шаха и
- Шаховска комуникација на даљину путем интернета.

5. О математичарима и шахистима

Оно што дефинитивно мора одликовати и једне и друге је употреба логике и разума. Можда ћемо се око логике сви сложити, али око овог другог тешко. Као што је математичарима познато, доношење закључака може се спровести на три начина: индукцијом, дедукцијом и аналогичјом. Математика признаје само дедукцију. Шахисти веома ретко могу да се ослоне на чисту дедукцију, морају размишљати на сва три начина. Једно истраживање, рађено у Америци, показало је да људски мозак истовремено може "памтити" седам различитих слика. Истраживање је требало да помогне психолозима у покушају да објасне механизам сазнавања код човека. Интересантно да су учесници експеримента који су показали максимум од седам слика искључиво врхунски шахисти. Огромно оружје шахиста је способност имагинације, замишљања слика много унапред. С друге стране, фино разумевање бесконачности је апсолутно страно у шаху док је то основна одлика математичара. Замислите математичара који самоуверено каже шахисти који тренутно игра неку партију: "Ова партија ће трајати вечно, али не брини добићеш је!" Наравно, шах и математика се међусобно не искључују. Постоји низ примера за ову тврдњу, али је довољно споменути др Емануела Ласкера, другог светског првака у шаху и доктора математике. Он је владао шаховским небом најдуже у историји, пуних 27 година, а дао је неке значајне резултате у векторском рачуну и постоји теорема у тој области која носи његово име. Био је велики пријатељ др Алберта Ајнштајна који је о Ласкеру једном приликом изјавио: "Штета што тако велики математичар улудо троши време играјући шах". Ипак, сви велики шахисти који су били математичари, бавили су се овим областима наизменично. То доказује ауторову тврдњу да је, нарочито у данашње време, потребна велика посвећеност да би се човек бавио било шахом, било математиком. Завршио бих једном реченицом баш споменутог Емануела Ласкера

"НА ПОЧЕТКУ БЕШЕ ШАХОВСКА ТАБЛА"